Esempio 1.8 (Potenza del binomio) Una formula importante che si può dimostrare per mezzo del principio di induzione è quella della potenza di un binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \tag{1.19}$$

La [1.19] è vera per $n = 0$; infatti in tal caso la somma si riduce a un solo termine, con $n = k = 0$, e la [1.19] diventa $1 = 1$.

Supponiamo ora che la [1.19] valga per n: moltiplicando ambo i membri per $a + b$ si ha allora

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Nella prima somma a secondo membro scriviamo $k + 1 = h$; si ha allora

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{n!}{(h-1)!(n+1-h)!} a^h b^{n+1-h}$$

e scrivendo k al posto di h (si ricordi che h è una variabile muta, e si può chiamare come si vuole):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} a^k b^{n+1-k}.$$

Introducendo questo valore nella [1.20], e scrivendo a parte i termini con $k = 0$ e $k = n + 1$, otteniamo

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n+1-k} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \right). \tag{1.21}$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) = \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\end{aligned} \tag{1.22}$$

che introdotta nella [1.21] dà la [1.19] per $n + 1$. □

I numeri $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si chiamano *coefficienti binomiali.*